

Кузьменко А.Г.,***Криворотько В.М.*****Хмельницкий национальный университет,
г. Хмельницкий, Украина**Национальный авиационный университет,
г. Киев, Украина**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗКИ МЕЖДУ
ШАРИКАМИ В РАДИАЛЬНОМ ПОДШИП-
НИКЕ КАЧЕНИЯ****Введение**

При разработке методов расчета радиальных подшипников (РПК) на износ и надежность первым этапом является определение максимальной нагрузки, действующей на шарик при заданной общей нагрузке.

На втором этапе выполняется расчет контактных давлений с учетом геометрии контакта в начальный момент эксплуатации РПК.

На третьем этапе проводятся испытания на износ с определением параметров моделей изнашивания.

На четвертом этапе с помощью расчетно-экспериментального метода определяется величина проскальзывания в РПК и пути трения скольжения шарика по дорожке качения.

На пятом этапе выполняются расчеты среднего износа РПК с учетом всех величин определенных на предыдущих параметрах.

На шестом этапе выполняется расчет параметров надежности РПК по износу или вероятный расчет подшипника.

В данной статье выполнен первый этап исследования: разработка методов расчета максимальных давлений на шарик РПК с учетом геометрии контакта, нагрузки и главное с учетом зазора в контакте, который в процессе износа увеличивается.

Предложено два подхода к решению задачи: дискретный и континуальный. Выполнен анализ связи этих двух подходов.

1. Подшипник без зазора, дискретная модель**1⁰. Постановка задачи**

Рассматривается упругое контактное взаимодействие между кольцами и шариками в однорядном радиальном подшипнике (РПК) без зазора, рис. 1.

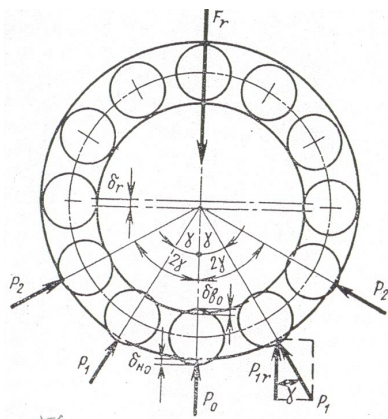


Рис. 1 – Распределение радиальной нагрузки в радиальном шарикоподшипнике с нулевым зазором

Ставится задача определить нагрузку, приходящуюся на каждый шарик.

Схема дискретного контакта, вероятно впервые, была рассмотрена Штрибеком в 1963 г. [2]. Здесь это решение воспроизводится с целью дальнейшего использования и уточнения некоторых результатов.

Постановка задачи включает условия равновесия, сплошности в контакте и выражение для податливости шарика.

Условие равновесия системы шариков при взаимодействии с наружным кольцом имеет вид:

$$Q_n = Q_0 + 2 \sum_{i=1}^n Q_i \cos i \Delta \varphi, \quad (1.1)$$

где Q_n – полная нагрузка на подшипнике;

Q_0 – максимальная нагрузка на один центральный шарик;

i – номер шарика, считая от оси симметрии;

$\Delta \varphi$ – угол между шариками;

n – число шариков на одной стороне, находящиеся в контакте; в случае контакта без зазора:

$$n = z / 4. \quad (1.2)$$

Условия сплошности в контакте

$$u_i = u(\varphi), \quad (1.3)$$

где u_i – действительные нормальные перемещения; $u(\varphi)$ – нормальные перемещения, следующие из геометрии контакта:

$$u(\varphi) = u_0 \cos \varphi, \quad (1.4)$$

где $\varphi = i \Delta \varphi$, подставив (1.4) в (1.3), получаем:

$$u_i = u_0 \cos \varphi. \quad (1.5)$$

Наконец, третьим соотношением в постановке задачи является соотношение между силой и максимальным нормальным перемещением в контакте шарика и дорожки качения.

В соответствии с решением Герца для тел двойкой кривизны [3] это соотношение имеет вид:

$$u_0 = 0,9777 n_\Delta \left[\left(\frac{Q}{E} \right)^2 \left(\frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \right]^{1/3}, \quad (1.6)$$

где R_1 – радиус шарика;

R_2 – радиус желоба дорожки под шариком;

R_3 – внешний радиус внутреннего кольца шарикоподшипника; модуль упругости стали ШХ 15;

n_Δ – коэффициент, определяемый по таблицам в зависимости от соотношения радиусов.

Зависимость (1.6) можно записать в виде:

$$u_0 = c_1 Q^{2/3} \quad (1.7)$$

или обратная зависимость:

$$Q = c_2 u_0^{2/3}, \quad (1.8)$$

где

$$c_1 = 0,9777 n_\Delta \left[\frac{1}{E^2} \left(\frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \right]^{1/3}, \quad (1.9)$$

$$c_2 = \frac{1}{c_1}. \quad (1.10)$$

Так, как каждый шарик имеем две точки контакта, то его общая податливость удваивается. С учетом этого имеем:

$$Q = c u_0^{3/2}, \quad (1.11)$$

где $c = 2c_1$.

Ставится задача: при нулевом зазоре определить силы, действующие в РПК на каждый шарик.

Главная задача – определение максимальной силы на средний наиболее нагруженный шарик.

2⁰. Решение задачи

Решение задачи о распределении силы по шарикам выполняется прямым преобразованием постановочных соотношений:

1) записывая соотношение (1.11) для двух шариков (среднего и текущего i -го), имеем:

$$\frac{Q_i}{Q_0} = \left(\frac{u_i}{u_0} \right)^{3/2}; \quad (1.13)$$

2) учитывая условие сплошности (1.5) из (1.13) имеем:

$$Q_i = Q_0 \cos^{3/2} \varphi; \quad (1.14)$$

3) подставляя далее это выражение в условие равновесия, имеем разрешающее уравнение в форме:

$$Q_n = Q_0 + 2 \sum_{i=1}^{z/4} Q_0 \cos^{5/2} \varphi, \quad (1.15)$$

$$\varphi = i\Delta \varphi;$$

отсюда находим искомую величину Q_0 :

$$Q_0 = \frac{Q_n}{1 + 2 \sum_{i=1}^{z/4} \cos^{5/2} i\Delta \varphi}. \quad (1.16)$$

Для анализа эту зависимость целесообразно записать в виде:

$$k = \frac{Q_0}{Q_n} = \frac{1}{1 + 2 \sum_{i=1}^{z/4} \cos^{5/2} i\Delta \varphi}, \quad (1.17)$$

где k – коэффициент, показывающий отношение максимальной нагрузки на средний шарик к полной нагрузке на подшипник.

При вычислениях коэффициента k по (1.17) следует суммирование выполнять до величины: $\varphi = i\Delta \varphi < 90^\circ$.

Результаты расчетов k до $z = 30$ шариков выполнены в табл. 1, в которой также указано число n – активно работающих шариков в подшипнике.

Таблица 1

Зависимость коэффициента k от числа шариков

Z/n_1	k	Z/n_1	k	Z/n_1	k
1/1	1	11/5	0,3966	21/11	0,2080
2/1	1	12/5	0,3637	22/11	0,1987
3/1	1	13/7	0,3365	23/11	0,1900
4/1	1	14/7	0,3123	24/11	0,1820
5/3	0,9362	15/7	0,2912	25/13	0,1748
6/3	0,7388	16/7	0,273	26/13	0,1681
7/3	0,6192	17/9	0,2571	27/13	0,1623
8/3	0,5435	18/9	0,2428	28/13	0,1561
9/5	0,4873	19/9	0,2302	29/15	0,1507
10/5	0,4379	20/9	0,2185	30/15	0,1505

Из рассмотрения результатов численного анализа для РПК без зазора следует:

1) при $z: 5...8$ 5 ... 8 шариков активно в работе участвуют 3 шарика; при $z: 9...12$ 9 ... 12 активно нагружены 5 шариков; при $z: 13...16$ 13 ... 16 нагружены 7 шариков и далее по таблице;

2) с увеличением общего числа шариков максимальная нагрузка на шарик естественно уменьшается, оставаясь, однако соизмеримой с общей нагрузкой. Так при $z: 8$ 8 нагрузка на один шарик приближенно равна половине нагрузки на подшипник; при 15 шариках примерно одна треть от общей нагрузки;

3) таблица 1 значений коэффициента нагрузки k более полная и удобная для расчетов, чем известные формы представления нагрузки на шарик по [2].

2. Подшипник с зазором, дискретная модель

1⁰. *Постановка задачи.* Рассматривается случай, когда между шариками и кольцами имеется радиальный зазор Δ , (рис. 2):

$$\Delta = (R_2 - R_1 + d) / 2, \quad (2.1)$$

где R_2, R_1 – радиусы дорожек качения внешнего и внутреннего кольца;
 d – диаметр шарика.

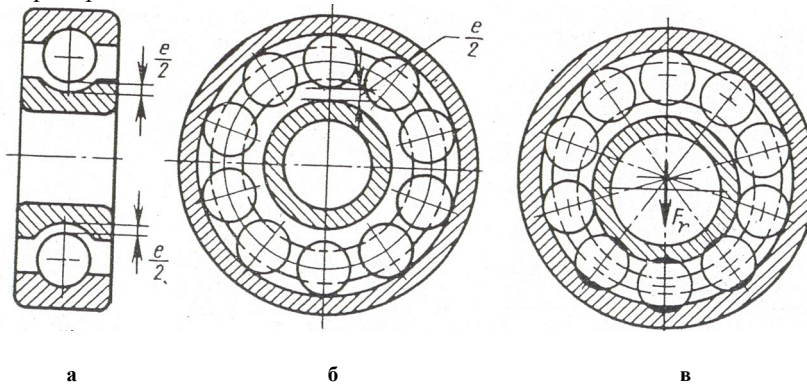


Рис. 2 – Схема однорядного радиального шарикоподшипника:
 а, б – с концентрически расположенными кольцами;
 в – со смещенным внутренним кольцом под действием радиальной нагрузки F_r .

1) условие сплошности в контакте в этом случае имеет вид:

$$u_i(\varphi) = \Delta \frac{\mathcal{K} \cos \varphi_i}{\mathcal{H} \cos \varphi_0} - 1 \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{M}}, \quad (2.2)$$

где $u_i(\varphi)$ – радиальное перемещение шарика;

φ_0 – угол контакта, которое может совпадать с углом последнего контактирующего тела, либо быть за последним контактирующим шариком;

φ_i – угловая координата i -го шарика, находящегося в контакте при $\varphi_i = 0$: $u_i(\varphi = 0) = u_0$.

$$u_0 = \Delta \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{H} \cos \varphi_0} - 1 \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{M}}. \quad (2.3)$$

Разделив (2.2.2.) на (2.2.3), получаем:

$$u_i(\varphi) = u_0 \frac{\cos \varphi_i - \cos \varphi_0}{1 - \cos \varphi_0}; \quad (2.4)$$

2) условие равновесия в системе шариков описывается соотношением:

$$Q_n = Q_0 + 2 \sum_{i=1}^n Q_i \cos \varphi_i, \quad (2.5)$$

где Q_0 – нагрузка на средний наиболее нагруженный шарик;

Q_i – нагрузка на i -й шарик;

3) третьим соотношением в постановке задачи является жесткостное соотношение для шарика:

$$Q_0 = c u_0^{3/2}; \quad Q_i = c u_i^{3/2}, \quad (2.6)$$

или

$$u_0 = \left(\frac{Q_0}{c} \right)^{2/3}; \quad u_i = \left(\frac{Q_i}{c} \right)^{2/3}. \quad (2.7)$$

Задача состоит в определении функции распределения нагрузки по шарикам и угла φ_0 .

2⁰. Составление разрешающего уравнения:

1) приравняв (2.2) и (2.7), имеем:

$$\left(\frac{Q_i}{c} \right)^{2/3} = \Delta \left(\frac{\cos \varphi_i}{\cos \varphi_0} - 1 \right), \quad (2.8)$$

отсюда получаем:

$$Q_i = c \left[\Delta \left(\frac{\cos \varphi_i}{\cos \varphi_0} - 1 \right) \right]^{3/2}, \quad (2.9)$$

$$Q_0 = c \left[\Delta \left(\frac{1}{\cos \varphi_0} - 1 \right) \right]^{2/3}; \quad (2.10)$$

2) подставляя это выражение в (2.5), имеем:

$$Q_n = Q_0 + 2c \sum_{i=1}^n \left[\Delta \left(\frac{\cos \varphi_i}{\cos \varphi_0} - 1 \right) \right]^{3/2} \cos \varphi_i. \quad (2.11)$$

С учетом соотношения (2.2.6), уравнение (2.2.10) приводится к виду:

$$\frac{Q_n}{c\Delta^{3/2}} = \frac{1}{\cos \varphi_0} - 1 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\cos \varphi_i}{\cos \varphi_0} \left(\frac{\cos \varphi_i}{\cos \varphi_0} - 1 \right)^{3/2} \cos \varphi_i. \quad (2.12)$$

Это и есть разрешающее уравнение задачи относительно угла φ_0 .

Нелинейное уравнение (2.11) с дискретными аргументами φ_i можно решать только численно, например, итерационным методом.

После определения φ_0 из (2.11) максимальное контактное давление определяется из выражения:

$$Q_0 = c \left[\Delta \left(\frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_0} - 1 \right) \right]^{3/2}. \quad (2.13)$$

3⁰. При выборе начального приближения в итерационной процедуре можно в качестве φ_i – брать угол контакта в выбранном подшипнике без зазора, а при определении φ_0 использовать метод последовательного перебора.

В этом случае уравнение (2.11) упрощается. Так, например, для подшипника 306 работают три шарика при $z = 8$, $\Delta \varphi = 45^\circ$, $\varphi_i = \varphi_1 = 45^\circ$, уравнение (2.12) принимает вид:

$$\frac{Q_n}{c} = \frac{1}{\cos \varphi_0} - 1 + 2 \frac{\cos 45^\circ}{\cos \varphi_0} \left(\frac{\cos 45^\circ}{\cos \varphi_0} - 1 \right)^{3/2} \cos 45^\circ \quad (2.14)$$

или

$$\frac{Q_n}{c\Delta^{2/3}} = \frac{1}{\cos \varphi_0} - 1 + 1,4142 \frac{0,7071}{\cos \varphi_0} \left(\frac{0,7071}{\cos \varphi_0} - 1 \right)^{3/2}. \quad (2.15)$$

Поиск решения перебором начинаем с $\varphi_0^{(1)} = \varphi_i = 45^\circ$, тогда в первом приближении:

$$\frac{Q_n}{c\Delta^{2/3}} = 1,26, \quad (2.16)$$

$$Q_n = Q_0^{(1)} = 1,26c\Delta^{3/2}. \quad (2.17)$$

То есть в этом случае вся нагрузка действует на один шарик, так как при $\varphi_0 = 2\Delta \varphi = 90^\circ$ и второй шарик не может вступить в контакт.

4⁰. Другой вариант разрешающего уравнения можно получить следующим образом.

Взяв отношение (2.9) и (2.10), получаем:

$$\frac{Q_i}{Q_0} = \frac{\cos \varphi_i - 1}{\cos \varphi_0 - 1} \left(\frac{\cos \varphi_i}{\cos \varphi_0} - 1 \right)^{3/2}. \quad (2.18)$$

Подставляя это выражение в (2.5), имеем:

$$\frac{Q_n}{Q_0} = 1 + 2e^{\frac{n}{3} \frac{\cos \varphi_i - 1}{\cos \varphi_0 - 1} \frac{D_w}{D} \frac{z}{z_0}} \cos \varphi_i \quad (2.19)$$

Решение задачи сводится к решению уравнения (2.19) относительно φ_0 численным методом.

Из решения уравнения (2.19) можно задавая φ_0 находить те значения отношения Q_n / Q_0 , которые соответствуют заданному φ_0 .

3. Пример расчета распределения нагрузки

Определить нагрузку на наиболее нагруженный шарик в РПК №306.

3.1. Исходные данные

Таблица 2

Данные по ГОСТ 8338-75

№	d , мм	D , мм	D_w , мм	z	C , кг	C_0 , кг
306	30	72	12,3	8	2200	1510

Данные по условиям нагружения взять по условиям работы заднего колеса автомобиля ВАЗ-2101.

3.2. Оценка допустимой полной нагрузки на подшипник

1. Оценка числа оборотов колеса в минуту для автомобиля:

1) при скорости автомобиля 60 км/час и диаметре шины $D=550$ мм = 0,55 м, число оборотов в минуту: $n = 60 \cdot 1000/\pi \cdot 0,55 \cdot 60 = 578$ об/мин.

Ориентировочно для оценок можно положить: $n = V$ км/час $\cdot 10 = n$ об/мин, т.е. умножив скорость автомобиля в км/час на 10, получаем число оборотов колеса в минуту.

Усредненный диаметр шины типа 155/30, по данным [31, 33] равен $D=548$ мм $\cong 550$ мм;

2) за 1000 часов работы автомобиля при скорости $V: 60$ км/час колесо вместе с подшипником совершает N оборотов: $n = 60 \cdot 1000 = 60000 = 36 \cdot 10^6$ об; $N = 1000 \cdot 600 \cdot 60 = 36 \cdot 10^6$ об;

3) год содержит всего: $T_{\text{год}} = 365 \cdot 24 = 8760$ часов.

При пятидневной неделе и непрерывном рабочем дне в течение 6 часов и работе в течение 44 недель продолжительность работы в часах составит: $T_{\text{раб}} = 44 \cdot 5 \cdot 6 = 1320$ часов;

4) за вычетом профилактических осмотров, ремонта и непредвиденных стоянок можно полагать, что автомобиль работает в году 1000 часов;

5) за это время при средней скорости 60 км/час автомобиль может иметь пробег:

$$L_{\text{км}} = TV = 1000 \cdot 60 = 60 \text{ тыс. км.}$$

6) Общее число оборотов подшипника колеса за один год составляет ориентировочно: $N = 36 \cdot 10^6$ об/год.

2. Расчет допустимой нагрузки:

1) При расчете нагрузки по допустимой грузоподъемности используется кривая контактной усталости в форме: $Q = \frac{C}{L^{1/3}}$, где C – динамическая грузоподъемность по стандарту, $L = \frac{N}{10^6}$ оборотов; Q – нагрузка.

2) Для подшипника №306 $C: 2200$ кг и общем числе миллионов циклов за 1000 часов равно 36 имеем допустимую нагрузку: $Q = 2200/(36)^{1/3} = 666$ кг.

3) Расчетная допустимая нагрузка на подшипник № 306 на 10 лет или 1000 часов работы в принятых условиях составляет: $Q = 2200/(360)^{1/3} = 309,3$ кг.

4) В автомобилях ВАЗ–2101 полна нагрузка на заднюю ось по [31] составляет 740 кг. Соответственно нагрузка на один радиальный шарикоподшипник задней оси типа 6306 максимальная нагрузка равна: $Q = 740/2 = 370$ кг.

5) В дальнейших расчетах среднюю расчетную нагрузку на выбранный РПК №306 будем принимать равной: $Q_n = 300\ 300$ кг.

3.3. Максимальная нагрузка на один шарик РПК №306 без зазора

Расчет нагрузки на шарик ведется по формуле (1.16) при $z = 8$. Удобней при этом расчет вести по формуле для коэффициента нагрузки (1.17) в форме:

$$\frac{1}{k} = 1 + 2 \sum_{i=1}^{z-4} e^{\cos^{5/2} i \Delta} \varphi .$$

1) угол контакта $\Delta \varphi$ определяется из соотношении: $\Delta \varphi = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$;

2) при $i = 1$, $\varphi_1 = 45^\circ$, при $i = 2$, $\varphi_2 = 90^\circ$. Но при $\varphi = 90^\circ$ шарик уже нагрузку не воспринимает, поэтому полагаем $i = 1$, $\varphi_1 = 45^\circ$ и выражение для k принимает вид:

$$\frac{1}{k} = 1 + 2 \cos^{5/2} 45^\circ = 1,8409 ;$$

$$k = 0,5434 .$$

3) при заданной нагрузке $Q_n = 300$ кг нагрузку на один шарик получаем равной:

$$Q_0 = k Q_n = 0,5432 \cdot 300 = 163 \text{ кг} .$$

3.4. Максимальная нагрузка на шарик при наличии зазора

1. Ставится задача определить максимальную нагрузку на шарик подшипника 306 при наличии:

1) стандартного зазора по ГОСТ 24810-81, что соответствует радиальному зазору:

$$\Delta_1 = \frac{Gr}{2} = 10 \text{ мкм} ;$$

2) при увеличении от износа радиального зазора до величины: $\Delta_2 = 50$ мкм = 0,05 мм. Расчет условного угла контакта Δ определяется из решения уравнения (2.12):

$$\frac{Q_n}{c \Delta^{3/2}} = \sum_{i=1}^z \frac{1}{\cos \varphi_i} - \sum_{i=1}^z \frac{1}{\cos \varphi_0} + 2 \sum_{i=1}^{z-4} e^{\cos^{5/2} i \Delta} \varphi_i - \sum_{i=1}^{z-4} e^{\cos^{5/2} i \Delta} \varphi_0 . \quad (3.1)$$

Для $z = 8$ при $\Delta = 0$ получено $\varphi_i = 45^\circ$. Можно полагать, что при $\Delta \neq 0$ можно также получить $\varphi_i = \varphi_0 = 45^\circ$; $\varphi_2 = 0$. Тогда уравнение (2.4) принимает конкретный вид:

$$\frac{Q_n}{c \Delta^{3/2}} = \sum_{i=1}^z \frac{1}{\cos \varphi_0} - \sum_{i=1}^z \frac{1}{\cos \varphi_0} + 1,4142 \sum_{i=1}^z \frac{\cos 45^\circ}{\cos \varphi_0} - \sum_{i=1}^z \frac{1}{\cos \varphi_0} . \quad (3.2)$$

2. Определение коэффициента контактной податливости шарика и колец.

При контакте шарика и желоба дорожки качения внутреннего кольца РПК, контактные перемещения определяются по формуле Герца [20], (1.6):

$$Q = c_g u_0^{3/2} , \quad (3.3)$$

где $c_g^{-1} = 0,655 n_\Delta \sum_{i=1}^z \frac{1}{E_i^2} \sum_{j=1}^z \frac{2}{R_j} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \sum_{i=1}^z \frac{1}{\cos \varphi_i} \varphi_i^{1/3}$, где R_1, R_2, R_3 – радиусы шарика, желоба и

кольца соответственно; n_Δ – коэффициент; E_*^2 – приведенный модуль упругости.

1) приведенный модуль упругости определяется по формуле:

$$\frac{1}{E_*} = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} = 2 \frac{1 - \mu^2}{E} ,$$

при $E = 2,1 \cdot 10^4$ кг/мм², $\mu = 0,3$; $E_* = 1,1538 \cdot 10^4$ кг/мм²;

2) при определении суммы кривизны используем исходные данные:

$$R_1 = 6,15 \text{ мм}; R_2 = 1,03R_1 \text{ по [22, с.441];}$$

$$R_2 = 1,03R_1 = 1,03 \cdot 6,15 = 6,33 \text{ мм};$$

$$R_3 = \frac{d}{3} + h = \frac{1}{2} \frac{D-d}{2} - 2R_{\text{ш}} + h = \frac{1}{2} \frac{72-30}{2} - 12,3 + \frac{30}{2} = 19,35 \text{ мм.}$$

$$\text{Сумма кривизн равна: } \sum k = \frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{2}{6,15} - \frac{1}{6,33} + \frac{1}{19,35} = 0,2189 \text{ мм};$$

3) Вспомогательный коэффициент в решении Герца определяем по [20] с помощью таблицы, где

$$n_{\Delta} = n_{\Delta}(A/B): A = \frac{1}{2} \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{2} \frac{1}{6,15} - \frac{1}{6,33} = 0,0023 \text{ 1/мм},$$

$$B = \frac{1}{2} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{2} \frac{1}{6,33} + \frac{1}{19,35} = 0,1048 \text{ 1/мм.}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{0,0023}{0,1048} = 0,0219.$$

По таблице [20, табл.61] получаем $n_{\Delta}(a/B = 0,0219) = 0,55$;

4) подставляя все найденные значения в (3.3), получаем:

$$c_{\sigma}^{-1} = 0,655 \cdot 0,55 \frac{10^{-4} \cdot \frac{1}{2}^2}{1,1538} \cdot 0,2189 \frac{1}{\frac{1}{2}} = 0,000425,$$

$$c_{\sigma} = 2350 \text{ кг/мм}^{3/2};$$

5) полный коэффициент податливости, учитывая податливость на наружном кольце – удваивается. $c = 2c_{\sigma} = 4700 \text{ кг/мм}^{3/2}$.

3. Подставляя все полученные результаты в разрешающее уравнение п. 1.4.2, имеем слева:

$$\frac{300}{4700(0,01)^{3/2}} = 63,82, \text{ и уравнение:}$$

$$63,82 = \frac{1}{\cos \varphi_0} - \frac{1}{\cos \varphi_0} + 1,4142 \frac{\cos 45^\circ}{\cos \varphi_0} - \frac{1}{\cos \varphi_0} \quad (3.4)$$

Решение уравнения выполняем численно, интеграционным методом:

1) первая итерация $\varphi_0^{(1)} = 80^\circ$, дает:

$$63,82 = \frac{1}{\cos 80^\circ} - \frac{1}{\cos 80^\circ} + 1,4142 \frac{\cos 45^\circ}{\cos 80^\circ} - \frac{1}{\cos 80^\circ} = 10,38 + 7,61 = 18 < 63;$$

2) вторая итерация $\varphi_0^{(2)} = 85^\circ$, дает:

$$63,82 = \frac{1}{\cos 85^\circ} - \frac{1}{\cos 85^\circ} + 1,4142 \frac{\cos 45^\circ}{\cos 85^\circ} - \frac{1}{\cos 85^\circ} = 60,6;$$

3) третья итерация $\varphi_0^{(3)} = 85,2^\circ$, дает:

$$63,82 = \frac{1}{\cos 85,2^\circ} - \frac{1}{\cos 85,2^\circ} + 1,4142 \frac{\cos 45^\circ}{\cos 85,2^\circ} - \frac{1}{\cos 85,2^\circ} = 36,23 + 28,75 = 64,98.$$

Угол $\varphi_0 = 85,2^\circ$ можно считать достаточно точным решением уравнения (2.3.4).

4. Величину максимальной нагрузки на шарик получаем из зависимости (2.13) при:

$$c = 4700 \text{ кг/мм}^{3/2}; \varphi_0 = 85,2^\circ, \Delta = 0,01 \text{ мм},$$

$$Q_0 = 4700 \frac{\text{Й}}{\text{Л}} 0,01 \frac{\text{Ж}}{\text{И}} \frac{1}{\cos 85,2^\circ} - 1 \frac{\text{Ц}}{\text{Ш}} \frac{\text{Ш}}{\text{Ы}}^{1/5} = 170,3 \text{ кг.}$$

$$\text{Коэффициент нагрузки: } k = \frac{Q_0}{Q_n} = \frac{170,3}{300} = 0,5677.$$

По сравнению со случаем без зазора нагрузка увеличилась $\Delta Q = 170,3 - 163 = 7,3$ кг на 7,3 кг.

3.5. Влияние увеличения зазора на нагрузку на шарик

1. Проследим процесс расчета нагрузки на наиболее нагруженный шарик при увеличении зазора от износа до $\Delta = 0,05$ мм.

При увеличении радиального зазора до 50 мкм слева в разрешающем уравнении получаем величину:

$$\frac{Q_n}{c\Delta^{3/2}} = \frac{300}{4700(0,05)^{1,5}} = 5,709.$$

С учетом (3.4) разрешающее уравнение принимает вид:

$$5,709 = \frac{\text{Ж}}{\text{И}} \frac{1}{\cos \varphi_0} - 1 \frac{\text{Ц}}{\text{Ш}}^{1,5} + 1,4142 \frac{\text{Ж}}{\text{И}} \frac{\cos 45^\circ}{\cos \varphi_0} - 1 \frac{\text{Ц}}{\text{Ш}}^{1,5}.$$

2. Выполняем решение тем же итерационным методом:

$$1) \text{ первая итерация } \varphi_0^{(1)} = 70^\circ, 5,709 = \frac{\text{Ж}}{\text{И}} \frac{1}{\cos 70^\circ} - 1 \frac{\text{Ц}}{\text{Ш}}^{1,5} + 1,4142 \frac{\text{Ж}}{\text{И}} \frac{0,7071}{0,342} - 1 \frac{\text{Ц}}{\text{Ш}}^{1,5} = 2,77;$$

$$2) \text{ вторая итерация } \varphi_0^{(2)} = 75^\circ, 5,709 = \frac{\text{Ж}}{\text{И}} \frac{1}{\cos 75^\circ} - 1 \frac{\text{Ц}}{\text{Ш}}^{1,5} + 1,4142 \frac{\text{Ж}}{\text{И}} \frac{0,7071}{0,2588} - 1 \frac{\text{Ц}}{\text{Ш}}^{1,5} \approx 8;$$

$$3) \text{ третья итерация } \varphi_0^{(3)} = 72,5^\circ,$$

$$5,709 = \frac{\text{Ж}}{\text{И}} \frac{1}{\cos 72,5^\circ} - 1 \frac{\text{Ц}}{\text{Ш}}^{1,5} + 1,4142 \frac{\text{Ж}}{\text{И}} \frac{0,7071}{0,3007} - 1 \frac{\text{Ц}}{\text{Ш}}^{1,5} = 5,12.$$

Решением можно с достаточной точностью считать угол $\varphi_0 = 72,6^\circ$.

3. Величину максимальной нагрузки получим по (2.13) при полученном значении величины угла

$$\varphi_0 = 72,6^\circ \text{ и } \Delta = 0,05 \text{ мм: } Q = 4700 \frac{\text{Й}}{\text{Л}} 0,05 \frac{\text{Ж}}{\text{И}} \frac{1}{\cos 72,6^\circ} - 1 \frac{\text{Ц}}{\text{Ш}} \frac{\text{Ш}}{\text{Ы}}^{1/5} = 188,6 \text{ кг.}$$

Таким образом, повышение радиального зазора от 10 мкм до 50 мкм увеличивает нагрузку на шарик от 162 кг до 188 кг, то есть на 16 %.

4. Распределение нагрузки между шариками по континуальной модели при нулевом зазоре

1⁰. Жесткостные соотношения континуальной модели могут быть получены из дискретной жесткостной модели путем распределения сосредоточенной нагрузки от шариков по всей контактной поверхности дорожки качения между шариками нелинейная зависимость нагрузки Q и максимальных контактных перемещений имеет вид:

$$u_g = cQ^{2/3}. \quad (4.1)$$

Распределим сосредоточенную нагрузку Q от шарика равномерно в окрестности Δl реального пятна контакта между шариками так, что:

$$\Delta l = R\Delta\varphi, \quad (4.2)$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{z} = \frac{360^\circ}{z}, \quad (4.3)$$

где R – радиус внутреннего кольца РПК;

z – общее число шариков.

Тогда условная распределенная нагрузка между шариками $q(\varphi)$ будет определяться соотношением:

$$q_k = \frac{Q}{3} \frac{u_k}{\Delta l} \quad / \quad \text{кг/мм.} \quad (4.4)$$

Будем полагать, что контактные перемещения во всех точках условного контакта будут нелинейно пропорциональны условной распределенной нагрузке q_φ с коэффициентом c_φ :

$$u_k = c_\varphi q_\varphi = c_\varphi \frac{3}{\pi} \frac{Q}{\Delta l} \frac{u_k}{\Delta l} \quad (4.5)$$

или обратная зависимость:

$$q(\varphi) = \frac{3}{\pi} \frac{u_k}{c_\varphi} \frac{u_k}{\Delta l} \quad (4.6)$$

Главным условием эквивалентности дискретной и континуальной моделей является равенство максимальных контактных перемещений в реальных контактных точках:

$$u_g = u_k \quad (4.7)$$

Исходя из этого условия, приравнявая (4.5) и (4.1), имеем:

$$cQ^{2/3} = c_\varphi \frac{3}{\pi} \frac{Q}{\Delta l} \frac{u_k}{\Delta l} \quad (4.8)$$

отсюда находим эквивалентную жесткость:

$$c_\varphi = c(\Delta l)^{2/3} = c(R\Delta\varphi)^{2/3} \quad (4.9)$$

2⁰. Постановка контактной задачи определения максимальной нагрузки, действующей на шарик в РПК формулируется с помощью:

1) условия сплошности в РПК при отсутствии зазора между кольцами и телами качения имеет вид

$$u_\varphi = u_0 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (4.10)$$

где $u_\varphi = u(\varphi)$ – контактное перемещение в точке φ ;

u_0 – максимальное контактное перемещение в радиальном сечении РПК;

2) условие равновесия в контакте системы шариков и внутреннего кольца РПК имеет вид:

$$Q_n = 2 \int_0^{\pi/2} q(\varphi) \cos \varphi R d\varphi, \quad (4.11)$$

где Q_n – полная нагрузка на подшипник.

3⁰. Решение задачи сводится к совместному рассмотрению постановочных уравнений.

Подставляя условие сплошности (4.10) в выражении для распределенной нагрузки (4.6), получаем:

$$q(\varphi) = \frac{3}{\pi} \frac{u_0 \cos \varphi}{c_\varphi} \frac{u_0 \cos \varphi}{\Delta l} \quad (4.12)$$

Далее подставляя эту зависимость в условие равновесия (4.11), получаем:

$$\frac{Q_n}{2R} = \int_0^{\pi/2} \frac{3}{\pi} \frac{u_0 \cos \varphi}{c_\varphi} \frac{u_0 \cos \varphi}{\Delta l} \cos \varphi d\varphi \quad (4.13)$$

или

$$\frac{Q_n}{2R} = \frac{J u_0}{I c_\varphi} \frac{z}{\psi} \int_0^{\pi/2} \cos^{5/2} \varphi d\varphi. \quad (4.14)$$

Умножая слева и справа на величину участка $\Delta l = R \Delta \varphi$, получаем:

$$\frac{Q_n R \Delta \varphi}{2R} = R \Delta \varphi \frac{J u_0}{I c_\varphi} \frac{z}{\psi} \int_0^{\pi/2} \cos^{5/2} \varphi d\varphi \quad (4.15)$$

или так как:

$$R \Delta \varphi \frac{J u_0}{I c_\varphi} \frac{z}{\psi} = Q_0, \quad (4.16)$$

то имеем:

$$\frac{Q_n \Delta \varphi}{2Q_0} = \int_0^{\pi/2} \cos^{5/2} \varphi d\varphi. \quad (4.17)$$

4°. Определенный интеграл в правой части определяем подробно в учебных целях. По формуле №858.45, Двайта Г. [4], имеем:

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^p \varphi d\varphi = \frac{\pi \Gamma(P+1)}{2^{P+1} \frac{M}{H} \Gamma\left(\frac{P}{2} + \frac{1}{2}\right) \frac{b}{\psi}}. \quad (a)$$

При $P = \frac{5}{2} = 2,5$, имеем:

$$I = \frac{\pi \Gamma(2,5+1)}{2^{3,5} \{ \Gamma(1,25+1) \}^2} \quad (b)$$

Используя свойства гамма функции:

$$x \Gamma(x) = \Gamma(x+1); \quad \Gamma(x) = (x-1) \Gamma(x-1); \quad (c)$$

имеем:

$$I = \frac{\pi 2,5 \Gamma(2,5)}{2^{3,5} \{ 1,25 \Gamma(1,25) \}^2} = \frac{\pi 2,5 \psi 1,5 \Gamma(1,5)}{2^{3,5} \{ 1,25 \Gamma(1,25) \}^2}, \quad (d)$$

далее по таблице гамма функций находим:

$$I = \frac{\pi 2,5 \psi 1,5 \psi 0,88623}{2^{3,5} (1,25 \psi 0,9064)^2} = 0,7181.$$

5°. Подставляя полученный интеграл в выражение (4.17), получаем:

$$\frac{Q_n \Delta \varphi}{2Q_0} = 0,7181 \quad (4.18)$$

Для определения коэффициента нагрузки необходимо определить величину угла $\Delta \varphi$ и подставить его в (4.18) учитывая, что $\Delta \varphi = \frac{2\pi}{z}$ окончательно имеем:

$$k = \frac{Q_0}{Q_n} = \frac{\Delta \varphi}{1,4362} = \frac{2\pi}{z \psi 1,4362}$$

$$k = \frac{2\pi}{1,4362z} \quad (4.19)$$

или
$$k = \frac{4,3749}{z} \quad (4.20)$$

Например, при $z = 8$: $k = 0,5468$, что с точностью до долей процента согласуется с решением задачи по дискретной модели п.3.1. это является основанием для дальнейшего использования континуальной модели в решении контактных задач для РПК.

5. Распределение нагрузки между шариками по континуальной модели в РПК с зазором

1⁰. Постановка задачи. Рассматривается контакт шариков и дорожек качения в радиальном шарикоподшипнике при наличии радиального зазора:

$$\Delta = R_2 - R_1, \quad (5.1)$$

где R_1 – радиус наружной поверхности внутреннего кольца РПК;

R_2 – радиус окружности точек поверхности проходящей через потенциально контактные точки шариков.

При рассмотрении задачи используем континуальную модель дискретного контакта шариков и колец, предложенную в п.3.4. В соответствии с этой моделью реальная жесткостная дискретная зависимость типа (4.1):

$$u_g = cQ^{2/3} \quad (5.2)$$

заменяется на континуальную модель:

$$u_k = c_\phi q_\phi^{2/3}, \quad (5.3)$$

где

$$q_\phi = \frac{Q}{\Delta l}, \quad (5.4)$$

$$c_\phi = c(R\Delta\phi)^{2/3}. \quad (5.5)$$

Постановка задачи формируется с помощью двух условий: сплошности в контакте и равновесия: 1) условие сплошности в контакте здесь соответствует соотношению (3.2.2):

$$u(\phi) = \Delta \frac{\text{Ж}}{\text{И}} \frac{\cos \phi}{\cos \phi_0} - \frac{\text{Ц}}{\text{Ш}}, \quad (5.6)$$

где $u(\phi)$ – максимальное радиальное перемещение шариков;

ϕ_0 – угол контакта, который может совпадать с углом касания последнего шарика, или быть за последним контактирующим шариком;

ϕ – текущий угол контакта.

При $\phi = 0$, $u(\phi = 0) = u_0$ – максимальное радиальное перемещение 6

$$u_0 = \Delta \frac{\text{Ж}}{\text{И}} \frac{1}{\cos \phi_0} - \frac{\text{Ц}}{\text{Ш}}; \quad (5.7)$$

2) условие равновесия внутреннего кольца РПК под действием сосредоточенной полной силы Q_n на подшипник при использовании распределенной нагрузки q_ϕ континуальной модели имеет вид:

$$Q_n = 2 \int_0^{\phi_0} q_\phi(\phi) \cos \phi R d\phi. \quad (5.8)$$

2⁰. Решение задачи выполняется сведением двух постановочных соотношений (5.6) и (5.8) к одному разрешающему уравнению следующим образом:

1) из основного соотношения континуальной модели (5.3) определяем функцию распределенной нагрузки q_ϕ :

$$q_{\varphi} = \frac{3}{2} \frac{u_k \Delta}{c_{\varphi}} \frac{1}{\cos \varphi} \quad ; \quad (5.9)$$

2) подставляя в это выражение условие сплошности (5.6), получаем:

$$q_{\varphi}(\varphi) = \frac{3}{2} \frac{\Delta}{c_{\varphi}} \frac{1}{\cos \varphi} \frac{1}{\cos \varphi_0} \frac{1}{\cos \varphi} \quad ; \quad (5.10)$$

3) с учетом этой зависимости условие равновесия (5.8) принимает вид:

$$Q_n = 2R \int_0^{\varphi_0} \frac{3}{2} \frac{\Delta}{c_{\varphi}} \frac{1}{\cos \varphi} \frac{1}{\cos \varphi_0} \frac{1}{\cos \varphi} \cos \varphi d\varphi \quad (5.11)$$

или

$$\frac{Q_n}{2R \left(\Delta / c_{\varphi} \right)^{3/2}} = \int_0^{\varphi_0} \frac{3}{2} \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0} \frac{1}{\cos \varphi} \cos \varphi d\varphi, \quad (5.12)$$

$$\int_0^{\varphi_0} \left(\cos \varphi - \cos \varphi_0 \right)^{3/2} \cos \varphi d\varphi$$

Это разрешающее уравнение задачи. После взятия интеграла получаем уравнение для определения угла контакта φ_0 . Далее порядок использования результата следующий:

- 1) по зависимости (5.7) определяется максимальное контактное перемещение u_0 ;
- 2) по (5.9) определяется максимальная распределенная нагрузка q_{φ_0} ;
- 3) максимальная контактная реальная нагрузка под шариком Q_0 определяется из соотношения

типа:

$$Q_0 = q_{\varphi_0} \Delta l = q_{\varphi_0} R \Delta \varphi \quad (5.13)$$

- 4) в завершение определяется коэффициент максимальной нагрузки:

$$k = \frac{Q_0}{Q_n}. \quad (5.14)$$

3⁰. Взятие интеграла (5.12) и решение разрешающего уравнения целесообразно решать численными методами с возможной последующей аппроксимацией последующих результатов.

Аналитическое взятие интеграла (5.12) в элементарных функциях затруднено.

Выводы

1. Выполнено уточненное решение задачи о контактном взаимодействии шариков и дорожки качения в радиальном подшипнике качения без зазора в дискретной постановке.

Из рассмотрения результатов численного анализа установлено: при $z: 5...85 \dots 8$ шариков активно в работе участвуют 3 шарика; при $z: 9...129 \dots 12$ активно нагружены 5 шариков; при $z: 13...16 \dots 16$ нагружены 7 шариков и далее по таблице; с увеличением общего числа шариков максимальная нагрузка на шарик естественно уменьшается, оставаясь, однако соизмеримой с общей нагрузкой. Так при $z = 8$ нагрузка на один шарик приближенно равна половине нагрузки на подшипник; при 15 шариках примерно одна треть от общей нагрузки; таблица 1 значений коэффициента нагрузки k более полная и удобная для расчетов, чем известные формы представления нагрузки на шарик по [2].

2. Выполнено уточненное решение задачи о распределении нагрузки по шарикам РПК в дискретной постановке с зазором. Установлено, что при малом стандартном зазоре максимальная нагрузка на шарик в РПК с зазором мало отличается от нагрузки без зазора.

3. Предложено решение задачи о контакте шариков РПК по континуальной модели, как без зазора, так и с зазором. В результате получены простые расчетные формулы для определения максимальной нагрузки на шарик в РПК.

В случае нулевого решения результаты расчетов по континуальной модели практически совпадают с результатами решения по дискретной модели.

В случае ненулевого зазора решение сведено к нелинейному трансцендентному уравнению с интегралом. Взятие интеграла и решение уравнения целесообразно решать численно.

Литература

1. Кузьменко А.Г. Метод розрахунків і випробувань на зношування та надійність. – Хмельницький: ТУП, 2002. – 151с.
2. Спришевский А. И. Подшипники качения. – М.: Машиностроение, 1969. – 631с.
3. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – К.: Наукова думка, 1988. – 736с.
4. Двайт Г. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Издание четвертое. Перевод с английского Н.В.Леви. Под редакцией К.А.Семендяева. – М.: Наука. – Главная редакция физико-математической литературы, 1973.

Надійшла 07.12.2009